1.6.5 Vodorovný vrh

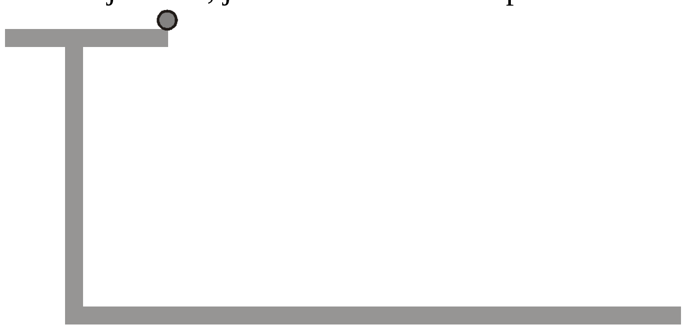
Předpoklady: 1604

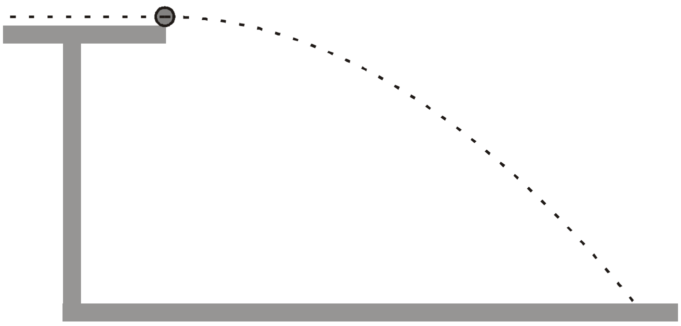
Pomůcky: kulička, stůl, případně metr a barva (na měření vzdálenosti doapdu a výšky stolu).

Pedagogická poznámka: Stejně jako předchozí i tato hodina stojí a padá s tím, jak dobře žáci počítají. Celý obsah se s většinou třídy stihnout nedá, stačí když se hlavní proud dostane přes příklad 7.

Další jednoduchý pohyb v gravitačním poli. Kulička se kutálí po stole a spadne z jeho okraje. Budeme studovat pád kuličky ze stolu.

Př. 1: Dokresli do obrázku trajektorii kuličky během pádu ze stolu. Které veličiny rozhodují o tom, jak daleko od stolu dopadne kulička na zem?

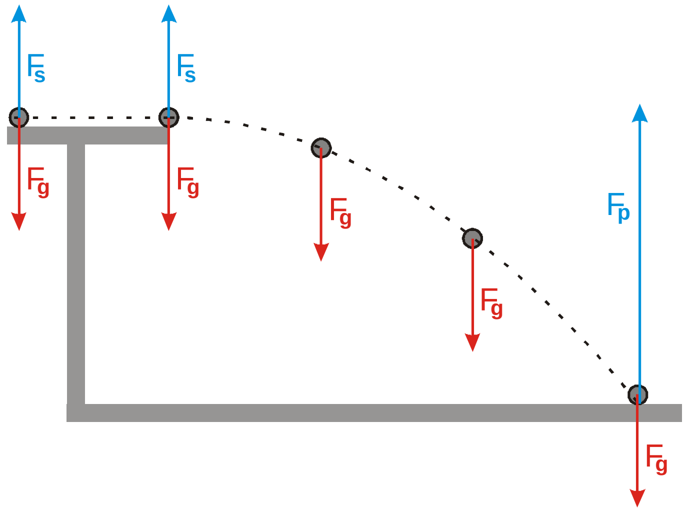




Kulička padá k zemi čím dál rychleji, proto je dráha zakřivená, ve vodorovné směru pokračuje pořád stejně dál.
Vzdálenost, ve které kulička dopadne na zem, roste rychlostí pohybu kuličky po stole a s výškou stolu.

Pedagogická poznámka: Žáci většinou nevyrukují s tím, že by se kulička ve vodorovném směru pohybovala rovnoměrně a já jim to nevnucuji.

Př. 2: Dokresli do obrázku několik poloh kuličky (v přibližně stejných vodorovných vzdálenostech) a nakresli síly, které na kuličku působí. Odpor vzduchu zanedbej. Jakým druhem pohybu se bude kulička pohybovat?



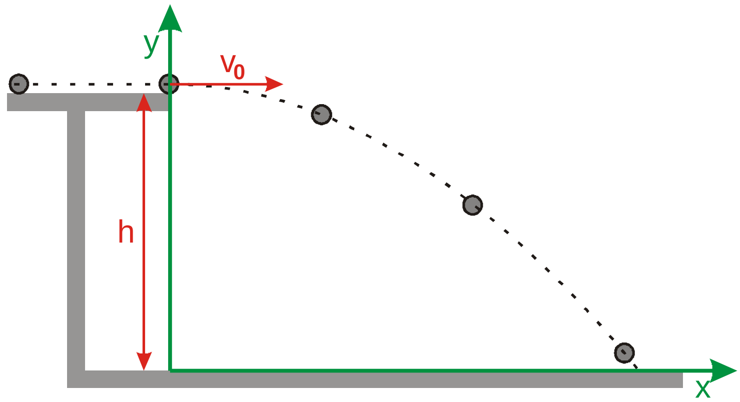
Ve všech polohách působí na kuličku gravitační síla. Dokud se kulička dotýká stolu, působí na ni tlaková síla stolu. Při kutálení po stole se kulička pohybuje rovnoměrně přímočaře (nulová výsledná síla), během pádu se pohybuje rovnoměrně zrychleně (výsledná síla se rovná gravitační síle).
V okamžiku dopadu je velikost síly, kterou působí podlaha daleko větší než velikost gravitační síly (podlaha musí kuličku velmi rychle zastavit a většinou i odrazit směrem vzhůru).

Pedagogická poznámka: Chci po žácích, aby do obrázku nakreslili kuličku v okamžiku dopadu na podlahu. Skutečnost, že síla podlahy je větší si mohou snadno ověřit tím, že na dlaň pustí z výšky například penál.

Na popis trajektorie kuličky nám nepostačí jedna souřadnice jako u svislého vrhu $\Rightarrow$ budeme sledovat pohyb:

- ve vodorovném směru (souřadnice x),
- ve svislém směru (souřadnice y).

Soustavu souřadnic zvolíme následovně.



O průběhu vrhu rozhoduje výška stolu h a počáteční rychlost kuličky v_0.

Př. 3: Rozeber síly, které působí ve směrech obou souřadnic, a na základě rozboru rozhodni, jakým způsobem se kulička v daném směru pohybuje.

Vodorovný směr: Na kuličku ve vodorovném směru nepůsobí žádná síla $\Rightarrow$ kulička se ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrně $\Rightarrow$

- $v_x = \text{konstanta} = v_0$,
- $x = v_x t = v_0 t$.

Svislý směr: Na kuličku ve svislém směru působí pouze gravitační síla $\Rightarrow$ kulička se ve svislém směru pohybuje rovnoměrně zrychleně $\Rightarrow$

- $v_y = v_{0y} + at$, dosadíme $v_{0y} = 0$, $a = -g$ $\Rightarrow$ $v_y = -gt$,
- $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$, dosadíme $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$, $a = -g$ $\Rightarrow$ $y = h - \frac{1}{2}gt^2$.

Pedagogická poznámka: Žáci napíšou do sešitu standardní rovnice, dosazení je dobré udělat na tabuli.

Vodorovný vrh probíhá ve vodorovném i svislém směru a je popsán těmito rovnicemi:

vodorovný směr: $v_x = v_0$**,** $x = v_0 t$ **, svislý směr:** $v_y = -gt$ **,** $y = h - \frac{1}{2}gt^2$**.**

Př. 4: Z ochozu věže, který je postaven ve výšce 30 m nad zemí, vystřelil lukostřelec vodorovně šíp rychlostí 35 m/s. Nakresli obrázek situace s trajektorií letu šípu. Do obrázku zakresli polohy určené v bodech a), b).
a) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 1 s.
b) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 2 s.
c) Odhadni, jak daleko od paty věže šíp dopadne.
d) Urči výpočtem, jak daleko od paty věže šíp dopadne.
e) Pod jakým úhlem se šíp zabodne do Země?

a) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 1 s.
Stačí dosadit do rovnic $t = 1\,\text{s}$.

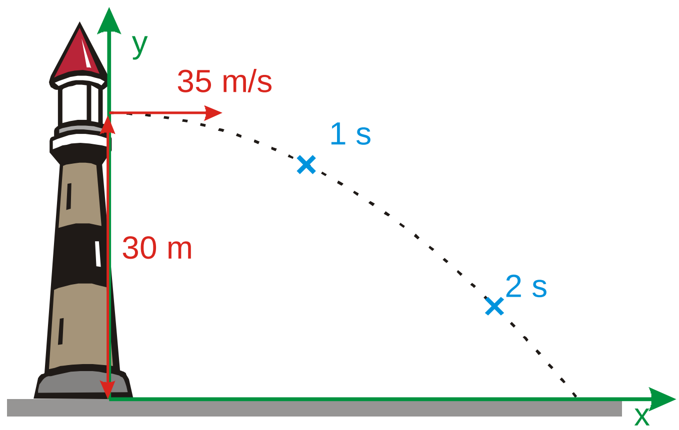
$v_x = v_0 = 35\,\text{m/s}$**,** $x = v_0 t = 35 \cdot 1\,\text{m} = 35\,\text{m}$

$v_y = -gt = -10 \cdot 1\,\text{m/s} = -10\,\text{m/s}$**,** $y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 30 - \frac{1}{2}10 \cdot 1^2\,\text{m} = 25\,\text{m}$

b) Urči polohu a složky rychlosti šípu po uplynutí 2 s.
Stačí dosadit do rovnic $t = 2\,\text{s}$.

$v_x = v_0 = 35\,\text{m/s}$**,** $x = v_0 t = 35 \cdot 2\,\text{m} = 70\,\text{m}$

$v_y = -gt = -10 \cdot 2\,\text{m/s} = -20\,\text{m/s}$**,** $y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 30 - \frac{1}{2}10 \cdot 2^2\,\text{m} = 10\,\text{m}$



Po sekundě letu spadl šíp pouze o 5 m $\Rightarrow$ je stále v $\frac{5}{6}$ původní výšky.

Po dvou sekundách je šíp ve výšce 10 m $\Rightarrow$ tedy v $\frac{1}{3}$ původní výšky.

c) Odhadni, jak daleko od paty věže šíp dopadne.
Rychlost pádu šípu se zvětšuje $\Rightarrow$ po 2 sekundách už je pouze 10 m nad zemí, má rychlost 20 m/s $\Rightarrow$ dopadne za méně než půl sekundy $\Rightarrow$ dopadne ve vzdálenosti kolem 90 m.

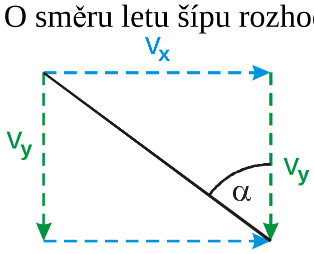
d) Urči výpočtem, jak daleko od paty věže šíp dopadne.
Vzdálenost, kterou šíp urazí ve vodorovném směru, určíme z rovnice $x = v_0 t$ $\Rightarrow$ musíme zjistit, jak dlouho šíp poletí.
Šíp letí, dokud nedopadne na zem $\Rightarrow$ dokud jeho výška nad zemí není nula $\Rightarrow$ čas určíme z rovnice $y = 0 = h - \frac{1}{2}gt^2$.

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{10}}\,\mathrm{s} = 2,45\,\mathrm{s}$$

$$x = v_0 t = 35 \cdot 2,45\,\mathrm{m} = 86\,\mathrm{m}$$

Šíp dopadne do vzdálenosti 86 metrů od paty věže.
O směru letu šípu rozhoduje velikost jeho rychlostí (x-ově i y-ové složky).



Z obrázku vidíme, že pro velikosti úhlu α (odchylka od svislého směru) platí:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_x}{-gt} = \frac{35}{-10 \cdot 2,45} = -1,43 \Rightarrow \alpha = -55°$$

Šíp se do země zabodne s odchylkou $55°$ od svislého směru.

Pedagogická poznámka: Body a), b) jsou důležité, protože testují, zda žáci alespoň částečně chápou, co čtyři rovnice, které mají znamenají. Proto kontrolujeme po bodu a), aby v bodě b) mohli počítat samostatně i Ti, kteří mají větší problémy. Na začátku se některým potřeba vysvětlit, co znamená určit polohu. Bod c) pak zkoumá, zda jsou předchozí výsledky schopni interpretovat. V bodu d) je první radou pouze informace, že v okamžiku dopadu má šíp nulovou *y*-ovou souřadnici. S bodem e) moc nečekám, je spíše zaměstnáním pro ty, kteří počítají rychleji.

Př. 5: Odvoď vzorec pro dostřel vodorovného vrhu.

Zopakujeme postup z bodu d) předchozího příkladu.

Doba vrhu: Předmět letí, dokud nedopadne na zem: $y = 0 = h - \frac{1}{2}gt^2$.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Dosadíme do vztahu pro *x*: $x_{\max} = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Př. 6: Kulička kutálející se po stole vysokém 80 cm, dopadla na zem 30 cm od hrany stolu. Urči, jakou rychlostí se kutálela.

30 cm tvoří dolet vodorovného vrhu $\Rightarrow$ určujeme jeho počáteční rychlost.

$$x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2h}} = 0,3\cdot\sqrt{\frac{10}{2\cdot 0,8}}\ \text{m/s} = 0,75\,\text{m/s}$$

Kulička se po stole kutálela rychlostí 0,75 m/s.

Pedagogická poznámka: K následujícímu příkladu nepsat výsledek na tabuli, protože prozrazuje, co mají žáci spočítat.

Př. 7: Osamělý kladný hrdina prchá po vodorovné střeše před početnou tlupou záporných hrdinů. Může se zachránit tím, že přeskočí uličku širokou 8 m, pokud je vodorovná střecha protějšího bloku o 5 m níže než střecha, po které zrovna běží?

Předpokládáme, že skok kladného hrdiny bude mít přibližně podobu vodorovného vrhu $\Rightarrow$ určíme, jakou rychlostí by se kladný hrdina musel odrazit.

$$x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2h}} = 8\cdot\sqrt{\frac{10}{2\cdot 5}}\ \text{m/s} = 8\,\text{m/s} = 29\,\text{km/h}$$

Maximální rychlost běhu, které dosahují trénovaní sportovci, se pohybuje okolo 30 km/h. Kladný hrdina má šanci (v případě, že je hlavní kladný a ještě není konec filmu tak spíše jistotu), že uličku přeskočí.

Př. 8: Bombardovací letadlo letí ve výšce 500 m rychlostí 650 km/h. V jaké vodorovné vzdálenosti před cílem musí shodit bomby, aby ho zasáhly?

$v = 650\,\mathrm{km/s} = 180\,\mathrm{m/s}$, $h = 500\,\mathrm{m}$, $x = ?$

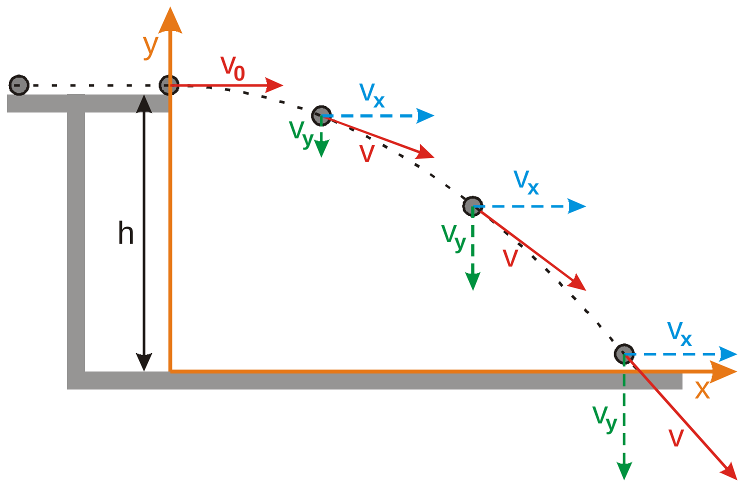
Letadlo musí shodit bomby dřív, protože během pádu bomba ještě urazí ve vodorovném směru určitou vzdálenost. Bomba se po vypuštění z letadla (při zanedbání odporu vzduchu) bude pohybovat ve vodorovném směru rovnoměrně rychlostí letadla a ve svislém směru rovnoměrně zrychleně (jde o vodorovný vrh) $\Rightarrow$ určujeme dostřel vodorovného vrhu.

Vzorec známe, rovnou dosadíme: $x = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 180\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot 500}{10}} = 1800\,\mathrm{m}$.

Letadlo musí shodit bomby 1800 m před tím než se ocitne nad cílem.

Dodatek: Získaný výsledek samozřejmě není přesný, protože v tomto případě nelze zanedbat odpor vzduchu. Uvedeným způsobem se provádělo takzvané kobercové bombardování, kdy nešlo o zničení konkrétního cíle, ale o způsobení co největších plošných škod. V případě snahy o zasažení cíle přecházely bombardéry do střemhlavého letu ve směru na cíl, na jehož konci shazovaly bomby.

Př. 9: Dokresli do obrázku se zakreslenými polohami kuličky během pádu vektory vodorovné a svislé složky rychlosti a vektor celkové rychlosti.



Př. 10: Střelec míří puškou na terč umístěný ve stejné výšce v jaké se nachází ústí její hlavně. Trefí střed terče pokud je puška namířená přesně na něj? Pokud ne, do kterého místa terče se kulka zaryje? Úsťová rychlost pušky je $700\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, vodorovná vzdálenost terče od pušky je 50 m. Odpor vzduchu zanedbej. Jak se výsledek příkladu liší od skutečnosti?

$v_0 = 700\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\quad d = 50\,\mathrm{m}$ $\quad y = ?$

Ve svislém směru na ní působí gravitační síla $\Rightarrow$ kulka neletí rovně, ale klesá. Její pohyb odpovídá vodorovnému vrhu. Protože ve vodorovném směru se pohybuje rovnoměrně, můžeme určit čas, za který doletí k terči a s jeho pomocí i výšku, o kterou poklesne ve svislém směru.

Vodorovný pohyb: $d = v_0 t \Rightarrow t = \dfrac{d}{v_0}$.

Svislý směr: $y = \frac{1}{2} g t^2$. Dosadíme $t = \frac{d}{v_0}$.

$$y = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{50^2}{700^2} \mathrm{m} = 0{,}026 \mathrm{m}$$

Střelec trefí terč 2,6 cm pod jeho středem. Ve skutečnosti by byl rozdíl ještě větší, protože na kulku působí odpor vzduchu, který její pohyb silně zpomaluje.

Dodatek: Přesně střílející zbraně s touto chybou počítají a na mířidlech je možné nastavit korekci závislou na vzdálenosti od cíle.

Př. 11: Jakou počáteční rychlostí musíš hodit vodorovně kámen, aby byla velikost rychlosti po dvou sekundách pohybu dvojnásobná v porovnání s počáteční rychlostí? Zakresli pro čas 2 s do obrázku vektory rychlosti a zrychlení kamene a vektor síly, která na kámen působí. Odpor vzduchu zanedbej.

$v_2 = 2v_0$, $t = 2\,\mathrm{s}$, $v_0 = ?$

Počáteční rychlost: v_0.

Rychlost po dvou sekundách: $v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $v_x = v_0$, $v_y = -gt$, nezajímá nás směr, pouze velikost $\Rightarrow v_y = gt$.

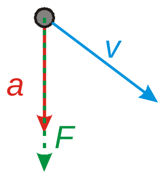
Dosadíme: $v_2 = 2v_0$.

$$\sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = 2v_0 \qquad /^2$$

$$v_0^2 + (gt)^2 = 4v_0^2$$

$$(gt)^2 = 3v_0^2$$

$$v_0^2 = \frac{(gt)^2}{3} \Rightarrow v_0 = \frac{gt}{\sqrt{3}} = \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{3}} \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 11{,}5 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



Kámen musíme hodin rychlostí $11{,}5 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Př. 12: Po stole se kutálí kulička. Najdi postup, kterým je možné změřit její rychlost pouze pomocí metru (tedy bez hodinek nebo stopek).

Kulička se časem dokutálí na okraj stolu a spadne. Její pád je ve skutečnosti vodorovným vrhem s počáteční rychlostí rovnou rychlosti jejího pohybu po stole. Můžeme změřit délku vrhu i výšku stolu a z nich vypočítat počáteční rychlost vrhu.
Jde o situaci řešenou v příkladu 6, zde uvedená čísla jsou hodnoty naměřené při pádu kuličky z katedry.

Shrnutí: Při vodorovném vrhu se předmět ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrně.